# ÉNONCÉ

$(E,d)$ espace métrique compact.

1. Th : $f : E \to \mathbb{R}$ continue $\Rightarrow f$ bornée et atteint ses bornes.

2. $f : E \to E$ continue telle que
$\forall x, y \in E,\ x \neq y \quad d(f(x), f(y)) < d(x,y) \quad (*)$
Alors $f$ admet un et un seul point fixe $a \in E$ et $\forall x \in E,\ f^n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} \alpha$
avec $f^n(x) = f(f(\dots f(x)))$

(3. contre exemple)

# LEÇONS.

223 : ⚠ adapter au cas $d = |\cdot|$ et $E =$ compact de $\mathbb{R}$.

203

226 : ⚠ adapter au cas $d = \|\cdot\|$, $E =$ compact de $\mathbb{R}^n$.
↳ les 2 et 3 ne rentrent pas vraiment dans cette leçon. Il faudrait trouver autre chose, potentiellement une partie de l'exo suivant du Gourdon.

# RÉFS.

2.3. [Go] : Gourdon Analyse p. 34

1. classique.

# RÉSULTATS ASSOCIÉS

1. $(x,y) \mapsto d(x,y)$ est continue.
2. th. de Bolzano Weierstrass (BW)
3. $(u_n)$ décroissante + minorée par $a \Rightarrow u_n \to \ell$ avec $\ell \geq a$

# DÉMO

: à l'oral.

écrit au tableau.

: pour comprendre.

# 1.

$(E, d)$ espace métrique compact

TH : $f : E \to \mathbb{R}$ cont. $f$ est bornée et atteint ses bornes

BW : Bolzano Weierstrass.

on peut aussi dire " par compacité " et pour la 203 où

on est dans $\mathbb{R}$, " par théorème de BW "

Mq $f(E)$ est compact :

. On va vérif prop BW.

. Soit $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \in f(E)^{\mathbb{N}}$.

. $\boxed{\text{Par la prop de BW}}$, $\exists \sigma$ extraction, $x \in E$ tq $x_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} x$.

Par continuité, $f(x_{\sigma(n)}) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x) \in E$.

Donc $f(E)$ est compact. (la suite admet une sous-suite CV).

et $f$ est bornée.

bornes atteintes. ( cas de l'inf qui va nous servir après)

Notons $\alpha := \inf_{x \in E} f(x)$ → $\exists$. ( spécificité de $\mathbb{R}$)

Par caract séq de l'inf, $\exists (x_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \alpha$.

Or, par la prop BW, $\exists \sigma$ extraction, $a \in E$, tq $x_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} a$

Par conti, $f(a) = \lim_{n \to \infty} f(x_{\sigma(n)}) = \alpha$

2. $f : E \to E$ continue.

sq $d(f(x), f(y)) < d(x,y) \quad \forall x \neq y \quad (\times)$

PLAN : ① $f$ admet un point fixe $\alpha$

② unicité " " "

③ $f^n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} \alpha \quad \forall x \in E$.

① existence : donnée par compacité et th. borne atteinte.

appli à quelle fonct ? Il faut qu'elle soit à val. dans $\mathbb{R}$ !

Rq : $\forall x \in E$, $f(x) = x \Leftrightarrow d(f(x), x) = 0$

LEM : $(x,y) \mapsto d(x,y)$ est continue de $(E^2, D) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$

où $D$ est la distance produit $D((x,y),(a,b)) = d(x,a) + d(y,b)$

BUT : $| d(x,y) - d(a,b) | \leq d(x,a) + d(y,b)$

par ineg trig : $d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,b) + d(b,y)$.

Donc $d(x,y) - d(a,b) \leq d(x,a) + d(b,y)$

Par sym, on a le rés.

car $d$ et $f$ le sont

Or, $\varphi : x \mapsto d(x, f(x))$ est continue donc atteint son inf sur $E$ compact.

$\exists \alpha \in E$ tq $\varphi(\alpha) \leq \varphi(x) \quad \forall x \in E$.

Mq $f(\alpha) = \alpha$ :

Par l'absurde, sq $f(\alpha) \neq \alpha$.

on veut obt contrad : on va contredire la minimalité de $\alpha$.

Alors par hyp, $\varphi(f(\alpha)) = d(f(\alpha), f(f(\alpha))) < d(\alpha, f(\alpha)) = \varphi(\alpha)$ : absurde.

Donc $f(\alpha) = \alpha$.

② sq $\beta \neq \alpha$ soit un autre pt fixe de $f$.

On a : $\underset{\substack{\parallel \\ d(\beta,\alpha)}}{d(f(\beta), f(\alpha))} < d(\beta, \alpha)$ : absurde.

Donc $\alpha = \beta$ et $\alpha$ est unique.

③ Soit $x \in E$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $\begin{cases} x_0 = x \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_{n+1} = f(x_n) = f^n(x). \end{cases}$

<u>BUT</u> : $d_n := d(x_n, \alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

<u>mq $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV</u> : mq $\searrow$ et minorée.

- <u>Si</u> $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $x_{n_0} = \alpha$ alors $\forall n \geq n_0$, $x_n = \alpha$ et $d_n = 0$.
- <u>Sinon</u> : Sq $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq \alpha$

$$d_{n+1} = d(x_{n+1}, \alpha) = d(f(x_n), f(\alpha)) < d(x_n, \alpha) = d_n.$$

Donc $(d_n) \searrow$.

De +, $d_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Par th lim monotone, $\exists \ell \geq 0$, $d_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

<u>mq $\ell = 0$</u> :

Par l'absurde, sq $\ell > 0$.

suite + compacité $\rightsquigarrow$ ss suites.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, par compacité, $\exists\, b \in E$, $\sigma$ extraction tq $x_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$

Donc $d(b, \alpha) = d(\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)}, \alpha) \underset{\text{conti}}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} d(x_{\sigma(n)}, \alpha) = \ell > 0$

ss suite suite CV = m̂ lim.

En particulier, $\alpha \neq b$.

On va donc pouvoir utiliser (*), ce qui encourage à regarder $d(f(\alpha), f(b))$

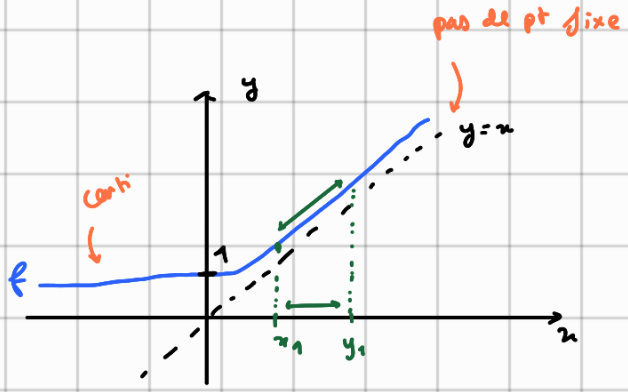
De plus, $d(f(b), f(\alpha)) = \lim\limits_{n\to+\infty} d(x_{\sigma(n)+1}, \alpha) = \ell$.

conti de d et f + $\alpha$ pt fixe.

Ainsi, $\ell = d(f(b), f(\alpha)) < d(b, \alpha) = \ell$ ∴ absurde.

Donc $\ell = 0$. et $f^n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.

3. **CEX** : (subtilité s'il reste du temps)




$f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \left(x + \frac{1}{1+x}\right) \mathbb{1}_{x \geq 0} + \mathbb{1}_{x<0} \end{array} \right.$

Par l'iAF, on peut mq $f$ vérifie (*)

- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 = \lim_{x \to 0^-} f(x)$. $f$ est continue.

- $f$ est $C^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\forall x \geq 0$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^2} < 1$

  $\forall x < 0$, $f'(x) = 0$

  $f'(0) = 0 = \lim_{x \to 0^-} f'(x)$. $< 1$.

Donc $f$ est $C^1$ et .

Par l'iAF, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $|f(x) - f(y)| < |x-y|$

- $f$ n'a pas de pt fixe car $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x \Leftrightarrow \left(x = 1 \text{ et } x < 0\right)$ ou $\left(\frac{1}{1+x} = 0 \text{ et } x \geq 0\right)$